КІБЕРНЕТИКА
та КОМП'ЮТЕРНІ
ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.85

DOI:10.34229/2707-451X.20.1.2

О.А. БЕРЕЗОВСЬКИЙ

ПОКРАЩЕННЯ ЛАГРАНЖЕВИХ ДВОЇСТИХ ОЦІНОК ДЛЯ КВАДРАТИЧНИХ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Розглянуто можливість покращення лагранжевих двоїстих оцінок для квадратичних екстремальних задач за рахунок використання функціонально надлишкових обмежень. Наведено ряд способів побудови таких обмежень.

Ключові слова: *квадратична екстремальна задача, лагранжева релаксація, двоїста оцінка, функціонально надлишкові обмеження.*

Під квадратичною екстремальною задачею розуміють задачу математичного програмування, у якої цільова функція та всі функції обмежень квадратичні (не виключається, що частина з них є лінійними функціями):

$$f^* = \inf_{x \in T} f_0(x), \tag{1}$$

де $T = \{x : f_i(x) \le 0, i \in I^{LQ}, f_i(x) = 0, i \in I^{EQ}; x \in R^n\}$, $f_i(x) = x^T A_i x + b^T{}_i x + c_i$, $i \in \{0\} \bigcup I^{LQ} \bigcup I^{EQ}$ – квадратична функція з симетричною $n \times n$-матрицею A_i, вектором $b_i \in R^n$ і константою $c_i \in R^1$; $m = |I^{LQ}| + |I^{EQ}|$ – загальна кількість обмежень. У загальному випадку задача (1) є NP-складною, у зв'язку з чим використовують різні опуклі релаксації для знаходження оцінок її глобального екстремуму: лагранжеві релаксації, SDP-релаксації, SOCP-релаксації, LP-релаксації та ін. (див., наприклад, [1–5]). В цій роботі розглядається лагранжева двоїста оцінка ψ^* [1] глобального мінімуму f^* квадратичної задачі (1):

$$\psi^* = \sup_{u \in \bar{D} \cap U^+} \psi(u) \le f^*, \tag{2}$$

де

$$\psi(u) = \inf_x L(u, x); \tag{3}$$

$L(u, x) = x^T A(u) x + b^T(u) x + c(u)$ – функція Лагранжа для задачі (1), в якій

$$A(u) = A_0 + \sum_{i=1}^m u_i A_i, \quad b(u) = b_0 + \sum_{i=1}^m u_i b_i,$$

$$c(u) = c_0 + \sum_{i=1}^m u_i c_i,$$

U^+ – область визначення двоїстих змінних $u \in R^m$, яка враховує наявність обмежень у вигляді нерівностей: $U^+ = \{u : u_i \ge 0, i \in I^{LQ}\}$; $D = \{u : A(u) \succ 0\}$ ($\bar{D} = \{u : A(u) \succeq 0\}$) – множина змінних $u \in R^m$, при яких матриця $A(u)$ додатно (невід'ємно) визначена; $m=\left|I^{LQ}\right|+\left|I^{EQ}\right|$ – загальна кількість обмежень. Задача (2) – (3) – лагранжева релаксація квадратичної екстремальної задачі за всіма обмеженнями з виписаною у явному вигляді умовою $A(u)\succ=0$, яка з точністю до граничних точок задає множину двоїстих змінних, при яких $\psi(u)\neq-\infty$ (розв'язок внутрішньої задачі (3)).

Головне питання при використанні двоїстого підходу для розв'язування квадратичних екстремальних задач – це якість двоїстих оцінок (величина розриву двоїстості) та можливості їх покращення. Якщо для квадратичних задач опуклої оптимізації оцінка (2) – (3) є точною, то в інших випадках це питання достатньо складне. Деякі результати стосовно умов, при виконанні яких значення глобального екстремуму квадратичної екстремальної задачі та її двоїстої оцінки співпадають, можна знайти, наприклад, в [6, 7]. Але ці умови часто не виконуються, тому виникає необхідність у прийомах покращення отримуваних оцінок. Це можливо, наприклад, за рахунок неоднозначності постановки квадратичної екстремальної задачі. Розглянемо простий приклад.

Для задачі

$$f^*=\min\{-x^2 : 2\le x\le 3\}$$

ефективна множина зовнішньої задачі (2) – пуста ($\bar{D}=\varnothing$) і, відповідно, двоїста оцінка не існує. Якщо переписати задачу у вигляді еквівалентної задачі (ні цільова функція, ні область визначення не змінилися)

$$f^*=\inf\{-x^2 : (x+2)^2\le 25, (x-5)^2\le 9\},$$

то для цієї постановки $\psi^*=-10.42<f^*=-9$ досягається при $u^*=(0.7143, 0.2857)$ і $x^*=2.8289$. У випадку ж іншої постановки даної задачі

$$f^*=\min\{-x^2 : (x-2)^2\le 1; (x-5)^2\le 9\}$$

оцінка (2) – (3) буде точною $\psi^*=f^*=-9$. Таким чином, усі задачі еквівалентні, а двоїсті оцінки для них різні.

Наведений приклад носить досить специфічний характер (змінюється опис області визначення прямих змінних). З найбільш загальних позицій неоднозначність постановки задачі використовується в техніці Н.З. Шора [1], в рамках якої для уточнення двоїстих оцінок пропонується розширення початкової квадратичної постановки задачі шляхом введення в неї так званих функціонально надлишкових обмежень. Під такими обмеженнями розуміють додаткові обмеження, які є наслідками вже існуючих обмежень задачі. Ці обмеження не несуть ніякої додаткової інформації з точки зору початкової задачі (тобто цільова функція і область визначення залишаються незмінними), але змінюють функцію Лагранжа і розширюють область визначення двоїстих змінних. Мається на увазі, що якщо задача має m обмежень, яким відповідає вектор двоїстих змінних $(u_1,...,u_m)^T\in D\subset R^m$, то після її доповнення новим обмеженням перші m компонент розширеного вектора $(u_1,...,u_m,u_{m+1})^T\in\tilde{D}\subset R^{m+1}$ при деяких значеннях u_{m+1} можуть вже і не належати множині D. Як результат, двоїста оцінка для нової "розширеної" квадратичної постановки буде не гірша за оцінку для початкової задачі (якщо покласти $u_{m+1}=0$, то вони співпадають), а у ряді випадків може виявитися більш точною, ніж для початкової, або навіть дорівнювати f^*. Наприклад, для задачі

$$f^*=\min\{-x^2 : x=3\}$$

допустима область двоїстих змінних – пуста ($\bar{D} = \varnothing$) і двоїстої оцінки не існує. Якщо ж розглянути іншу постановку цієї задачі (її відмінність полягає у надлишковому обмеженні $x^2 = 9$, яке є наслідком обмеження $x = 3$)

$$f^* = \min\{-x^2 : x = 3, x^2 = 9\},$$

для якої функція Лагранжа $L(u,x) = -x^2 + u_1(x^2 - 9) + u_2(x - 31)$, то при $u_1 = 1$ і $u_2 = 0$ при довільних значеннях прямої змінної x розв'язок внутрішньої задачі дорівнює -9, що є оптимальним значенням цільової функції даної квадратичної задачі. Таким чином для розширеної за допомогою рівності $x^2 = 9$ задачі маємо точну двоїсту оцінку $\psi^* = f^* = -9$.

Ще у восьмидесятих роках минулого століття Н.З. Шором був запропонований шлях розширення квадратичної задачі функціонально надлишковими обмеженнями, який можна узагальнити та схематизувати таким чином:

А) додаємо в початкову задачу квадратичні обмеження, які вводять нові змінні $R(\alpha^{(i)}) = R(\alpha^{(j)})R(\alpha^{(k)})$, $\alpha^{(i)} = \alpha^{(j)} + \alpha^{(k)}$, де невід'ємний цілочисельний вектор $\alpha^{(r)} = (\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)}, \ldots, \alpha_n^{(r)})^T \le \bar{\alpha}$ визначає змінну $R(\alpha^{(r)})$, якій у початковому просторі R^n відповідає моном $R(\alpha^{(r)}) = x_1^{\alpha_1^{(r)}} x_2^{\alpha_2^{(r)}} \ldots x_n^{\alpha_n^{(r)}}$. Вектор $\bar{\alpha}$, який теоретично можна вибирати яким завгодно, обмежує кількість цих змінних. Само по собі таке введення нових змінних не надає дивідендів, але в сукупності з надлишковими обмеженнями типу

$$R(\alpha^{(i)})R(\alpha^{(j)}) - R(\alpha^{(k)})R(\alpha^{(l)}) = 0 \text{ при } \alpha^{(i)} + \alpha^{(j)} = \alpha^{(k)} + \alpha^{(l)}, \tag{4}$$

які задають різноманітні зв'язки між ними (за допомогою обмежень такого вигляду враховується неоднозначність представлення монома $x_1^{\alpha_1^{(r)}} x_2^{\alpha_2^{(r)}} \ldots x_n^{\alpha_n^{(r)}}$, $\alpha^{(r)} = \alpha^{(i)} + \alpha^{(j)} = \alpha^{(k)} + \alpha^{(l)}$ через нові змінні), можна розраховувати на поліпшення двоїстої оцінки (зменшення розриву двоїстості).

Зазначимо, що в [1] введення нових змінних використано для пониження степені поліному і зведення задачі знаходження глобального мінімуму полінома до еквівалентної квадратичної екстремальної задачі. Однак зрозуміло, що застосування цього прийому ширше – будь-яку квадратичну функцію (поліном) можна розглядати як поліном вищої степені, коефіцієнти якого при старших степенях дорівнюють нулю;

Б) додаємо обмеження, отримані шляхом перемноження обмежень задачі у всіх можливих поєднаннях (по два, по три і так далі), тобто обмеження виду $\prod_{i \in L} f_i(x) = 0$ (для випадків, коли $\exists i \in L$, таке що $i \in I^{EQ}$), $\prod_{i \in L} f_i^{(1)}(x) = \prod_{i \in L} f_i^{(2)}(x)$ (у випадку, коли $f_i(x) = f_i^{(1)}(x) - f_i^{(2)}(x)$, $i \in L \subseteq I^{EQ}$) і $-\prod_{i \in L}(-f_i(x)) \le 0$ (у випадку, коли $L \subseteq I^{IQ}$). Зазначимо, що для реалізації даної процедури множина I^{EQ} може включати як обмеження початкової задачі (1), так і обмеження, які визначають нові змінні (див. попередній п. А). Отримані обмеження, що містять мономи, степінь яких не дозволяє їхнє представлення у вигляді квадратичної форми (враховуючи заданий набір нових змінних), вилучаються. Але тоді можливе використання їхніх лінійних комбінацій степені не більше двох. Наприклад, якщо задача має обмеження $x_1^2 = (a_1, x) + b_1$, $x_2^2 = (a_2, x) + b_2$,

$x_1 x_2 = (a_3, x) + b_3$, то обмеження $x_1^2 x_2^2 = ((a_1, x) + b_1)((a_2, x) + b_2)$ та $x_1^2 x_2^2 = ((a_3, x) + b_3)^2$ ігноруються, але обмеження

$$((a_1, x) + b_1)((a_2, x) + b_2) = ((a_3, x) + b_3)^2$$

можна долучити в задачу.

Найпростіший приклад функціонально надлишкових обмежень, які можна отримати за даною схемою (п. п. А і Б) – це $(b_l^T x + c_l)(b_k^T x + c_k) \ge 0$ для задач, які включають лінійні обмеження $b_l^T x + c_l \le 0$ та $b_k^T x + c_k \le 0$. Ще один приклад можна знайти у роботі [8], де розглядається квадратична екстремальна задача з обмеженнями $x_i^2 = 1$, $i = \overline{1, n}$. При таких обмеженнях (притримуючись позначень і загальних рамок наведеної вище схеми в п. п. А і Б) виписано розширену задачу з додатковими змінними $R(\alpha^{(i)}) = R(\alpha^{(j)}) R(\alpha^{(k)})$ при $\alpha^{(i)} = \alpha^{(j)} + \alpha^{(k)}$, обмеженнями вигляду (4) (п. А) і обмеженнями $R^2(\alpha^{(i)}) = 1$ (п. Б). Змінні $R(\alpha^{(i)})$, які дорівнюють 1 (випадок, коли всі степені моному, якому відповідає дана змінна $R(\alpha^{(i)})$, парні) вилучалися прямою підстановкою значення у постановку задачі.

Зрозуміло, що розширення початкової задачі додатковими обмеженнями надає можливості і для уточнення оцінок, які обчислюються за допомогою інших релаксацій, у тому числі лінійних релаксацій. Під лінійними релаксаціями розуміємо задачі лінійного програмування, допустима область яких містить допустиму область початкової задачі, а значення обох цільових функцій у точках допустимої області початкової задачі співпадають. Наприклад, *LP*-релаксація лінійної задачі цілочисельного програмування зводить задачу до задачі лінійного програмування, в яких умова $x_i \in \{0;1\}$, $i = \overline{1, n}$, замінюється двосторонньою нерівністю $0 \le x_i \le 1$, $i = \overline{1, n}$ (її також можна розглядати як лінійну релаксацію квадратичної рівності $x_i^2 = 1$, $i = \overline{1, n}$). Або у випадку квадратичних екстремальних задач квадратичні форми задачі зводяться до лінійних шляхом введення нових змінних $X = xx^T$ з наступною релаксацією задачі шляхом заміни рівностей взаємозв'язку старих і нових змінних різними сімействами лінійних обмежень. Наприклад, при наявності обмежень вигляду

$$0 \le x_i \le 1,\ i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

можна використовувати *RLT*-релаксацію [9]

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\ \ X_{ij} \ge 0,\ X_{ij} \ge x_i + x_j - 1,\ X_{ij} \le x_i,\ X_{ij} \le x_j,$$

або різні обмеження для булевого квадратичного політопа (BQP), наприклад, нерівності «трикутників» [10]

$$\forall i \ne j \ne k\ \ i, j, k \in \{1, \ldots, n\}\ \ x_i + x_j + x_k \le X_{ij} + X_{ik} + X_{jk} + 1,$$

$$X_{ij} + X_{ik} \le x_i + X_{jk},\ X_{ij} + X_{jk} \le x_j + X_{ik},\ X_{ik} + X_{jk} \le x_k + X_{ij}.$$

Тут слід звернути увагу, що з точки зору сформульованої вище техніки побудови функціонально надлишкових обмежень для квадратичних задач (п. п. А і Б) *RLT*-релаксації є результатом попарних добутків лінійних обмежень (5) (наприклад, з $(1 - x_i)(x_j - 0) \ge 0$ маємо $x_i x_j \le x_j$, з $(1 - x_i)(1 - x_j) \ge 0$ – $x_i x_j \ge x_i + x_j - 1$), а нерівності «трикутників» можна отримати як результат суми потрійних добутків цих же базових обмежень (5) (наприклад, з суми $(x_i - 0)(x_j - 0)(x_k - 0) \ge 0$ і $(1 - x_i)(1 - x_j)(1 - x_k) \ge 0$ випливає $x_i + x_j + x_k \le x_i x_j + x_i x_k + x_j x_k + 1$, з суми $(1-x_i)(x_j-0)(x_k-0)\ge 0$ і $(x_i-0)(1-x_j)(1-x_k)\ge 0$ – $x_i x_j + x_i x_k \le x_i + x_j x_k$). Останній спосіб побудови не обмежується нерівностями «трикутників» – квадратичні обмеження, які відповідають *RLT*-нерівностям, також можна отримати з потрійних добутків, так як з них випливають попарні добутки (наприклад, з суми $(x_i-0)(1-x_j)(1-x_k)\ge 0$ і $(1-x_i)(1-x_j)(1-x_k)\ge 0$ маємо $(1-x_j)(1-x_k)\ge 0$, а значить і $x_j x_k \ge x_j + x_k - 1$). Зрозуміло, що для приведення отриманих квадратичних функціонально надлишкових обмежень до лінійного вигляду (у випадку лінійної релаксаці) треба зробити заміну у цих обмеженнях квадратичних членів новими лінійними змінними $X = xx^T$.

Можливості покращення лагранжевої двоїстої оцінки не обмежуються прийомами, описаними в п. п. А і Б. Узагальнюючи викладений шлях розширення квадратичної задачі (1), підкреслимо, що як функціональні надлишкові обмеження можуть виступати будь-які квадратичні обмеження (як із змінними початкової задачі, так і з будь-якими новими), які не впливають на допустиму область початкової квадратичної задачі. Це можуть бути, наприклад, обмеження вигляду $f_i(x) * P(x) = 0$ для будь-якого $i \in I^{EQ}$ і довільного полінома $P(x)$ (при умові введення достатньої кількості нових змінних для приведення обмежень до квадратичного вигляду), або вигляду $f_i(x) * P(x) \le 0$ для будь-якого $i \in I^{LQ}$ і довільного полінома $P(x)$, який приймає невід’ємні значення в області T [6]. Або це можуть бути обмеження, що отримані виходячи з особливостей задачі. Наприклад, в [11] для бінарних змінних як функціональні надлишкові обмеження запропоновані обмеження

$$(\sum_{i=1}^{2k+1} \pm x_i)^2 \ge 1 \text{ і } (1 + \sum_{i=1}^{2k} \pm x_i)^2 \ge 1,$$

а в [12] для випадку, коли змінні задачі утворюють систему ортонормованих векторів

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2 = 1,\ i = \overline{1,n},$$

$$\sum_{l=1}^{n} x_{il} x_{jl} = 0,\ i = \overline{1,n-1},\ j = \overline{i+1,n},$$

запропоновані обмеження, які випливають з властивості квадратної матриці, що якщо її рядки є ортонормованими векторами, то і її стовбці також ортонормовані вектори:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 = 1,\ j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{l=1}^{n} x_{li} x_{lj} = 0,\ i = \overline{1,n-1},\ j = \overline{i+1,n}.$$

Головне при побудові функціонально надлишкових обмежень, щоб вони включали активні обмеження, що дозволяють «корисно» змінити функцію Лагранжа і розширити область визначення двоїстих змінних у задачі (2). Для ілюстрації сказаного можна навести такий приклад (правда, дещо штучний): якщо у довільну квадратичну екстремальну задачу (1) додати обмеження $y^2 - f_0(x) + f^* = 0$, де y – нова додаткова змінна, то двоїста оцінка ψ^* (2) – (3) буде точною ($\psi^* = f^*$). Можна привести, як приклад, і таку задачу:

$$f^* = \min\{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 : x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 1\},$$

для якої двоїста оцінка не точна – $\psi^* = -0.5 < f^* = 0$. Якщо ввести в задачу нову змінну x_4: $x_1 x_2 = x_3 x_4$, для якої на області визначення початкової задачі виконуються рівності $x_4^2 = 1$,

$x_2 x_3 = x_1 x_4$, $x_1 x_3 = x_2 x_4$, то для функції Лагранжа розширеної цими функціонально надлишковими обмеженнями при $u^* = (-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ маємо

$$L(u^*.x) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 - \frac{3}{4}(x_1^2 - 1) + \sum_{i=2}^{4} \frac{1}{4}(x_i^2 - 1) +$$

$$+\frac{1}{2}(x_4 x_3 - x_1 x_2) + \frac{1}{2}(x_4 x_2 - x_1 x_3) + \frac{1}{2}(x_4 x_3 - x_1 x_2) = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2.$$

Таким чином $L(u^*.x) - f^* = L(u^*.x) - 0 = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2$, тобто двоїста оцінка точна згідно з наступною теоремою.

Теорема [6, теорема 4]. Для того, щоб квадратична екстремальна задача з $f^* > -\infty$ мала точну двоїсту оцінку, необхідно і достатньо, щоб існував такий вектор множників Лагранжа u^*, при якому функцію $L(u^*, x) - f^*$ можна представити у вигляді суми квадратів лінійних функцій.

На завершення зазначимо, що всі результати стосовно двоїстих оцінок (2) – (3) можуть бути використані при дослідженні SDP-релаксацій, оскільки для однієї і тієї ж постановки квадратичної екстремальної задачі при виконанні умови регулярності обидві оцінки співпадають [13, 14].

Список літератури

1. Шор Н.З., Стеценко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. Киев: Наукова думка, 1989. 208 с.
2. Lemaréchal C. Lagrangian relaxation. *Computational combinatorial optimization*. 2001. P. 112–156.
3. Nesterov Y., Wolkowicz H., Ye Y. Semidefinite programming relaxations of nonconvex quadratic optimization. *Handbook of semidefinite programming*. New York: Springer US, 2000. P. 361–419.
4. Kim S., Kojima M. Second order cone programming relaxation of nonconvex quadratic optimization problems. *Optimization methods and software*. 2001. 15(3). P. 201–224.
5. Qualizza A., Belotti P., Margot F. Linear programming relaxations of quadratically constrained quadratic programs. *Mixed Integer Nonlinear Programming*. NY: Springer, 2012. P. 407–426.
6. Березовский О.А. О точности двойственных оценок для квадратичных экстремальных задач. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. № 1. С. 33–39.
7. Березовский О.А. О решении одной специальной оптимизационной задачи, связанной с определением инвариантных множеств динамических систем. *Проблемы управления и информатики*. 2015. № 3. С. 33–40.
8. Стецюк П.И. О функционально избыточных ограничениях для булевых оптимизационных задач квадратичного типа. *Кибернетика и системный анализ*. 2005. № 6. С. 168–172.
9. Sherali H.D., Adams W.P. A Reformulation-Linearization Technique for Solving Discrete and Continuous Nonconvex Problems. Dordrecht: Kluwer, 1998. 516 p.
10. Yajima Y., Fujie T. A polyhedral approach for nonconvex quadratic programming problems with box constraints. *Journal of Global Optimization*. 1998. 13. P. 151–170.
11. Стецюк П.И. Новые модели квадратичного типа для задачи о максимальном взвешенном разрезе графа. *Кибернетика и системный анализ*. 2006. № 1. С. 63–75.
12. Березовский О.А. О нижней оценке для одной квадратичной задачи на многообразии Штифеля. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 5. С. 95–103.
13. Fujit T., Kojima M. Semidefinite programming relaxation for nonconvex quadratic problems. *Journal of Global Optimization*. 1997. 10. P. 367–380.
14. Березовский О.А. Критерии точности *SDP*-релаксаций квадратичных экстремальных задач. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. № 6. С. 95–101.

Одержано 03.03.2020

Березовський Олег Анатолійович,
кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,
o.a.berezovskyi@gmail.com

УДК 519.85

О.А. Березовский

УЛУЧШЕНИЕ ЛАГРАНЖЕВЫХ ДВОЙСТВЕННЫХ ОЦЕНОК ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Институт кибернетики имени В.М. Глушкова, Киев, Украина
Переписка: o.a.berezovskyi@gmail.com

Введение. В связи с тем, что квадратичные экстремальные задачи в общем случае являются NP-сложными, используют различные выпуклые релаксации для нахождения оценок их глобальных экстремумов: лагранжевые релаксации, SDP-релаксации, SOCP-релаксации, LP-релаксации и другие. В этой работе исследуется двойственная оценка, которая является результатом лагранжевой релаксации квадратичной экстремальной задачи по всем ограничениям. Главный вопрос при использовании такого подхода для решения квадратичных экстремальных задач – это качество полученных оценок (величина разрыва двойственности) и возможности их улучшения. Если для квадратичных задач выпуклой оптимизации такие оценки являются точными, то в других случаях этот вопрос достаточно сложный. В невыпуклых случаях для улучшения двойственных оценок (уменьшения разрыва двойственности) можно использовать приемы, основанные на неоднозначности постановок задач. Наиболее общий из этих приемов – это расширение начальной квадратичной постановки задачи путем введения в нее так называемых функционально избыточных ограничений (дополнительные ограничения – это следствия уже существующих ограничений задачи). Способы построения таких ограничений могут носить общий характер, так и использовать специфику конкретной задачи.

Цель работы. Показать пути улучшения лагранжевых двойственных оценок для квадратичных экстремальных задач за счет использования функционально избыточных ограничений; привести примеры построения таких ограничений.

Результаты. Рассмотрено общую концепцию использования функционально избыточных ограничений для улучшения лагранжевых двойственных оценок для квадратичных экстремальных задач. Приведен ряд способов построения таких ограничений. В частности, в обобщенном и схематизированном виде представлен подход к построению функционально избыточных ограничений для квадратичной задачи общего вида, предложенный Н.З. Шором. Также отмечается возможность использования и других специфических приемов построения функционально избыточных ограничений, использующих особенности конкретных задач.

Выводы. Для улучшения двойственных оценок для квадратичных экстремальных задач можно использовать различные семейства функционально избыточных ограничений как общего, так и специфического типа. Их применение в ряде случаев может привести к уточнению оценок или даже предоставить возможность получить точные значения глобальных экстремумов.

Ключевые слова: квадратичная экстремальная задача, лагранжевая релаксация, двойственная оценка, функционально избыточные ограничения.

UDC 519.85

O. Berezovskyi

IMPROVING LAGRANGE DUAL BOUNDS FOR QUADRATIC EXTREMAL PROBLEMS

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics, Kyiv, Ukraine
Correspondence: o.a.berezovskyi@gmail.com

Introduction. Due to the fact that quadratic extremal problems are generally NP-hard, various convex relaxations to find bounds for their global extrema are used, namely, Lagrangian relaxation, SDP-relaxation, SOCP-relaxation, LP-relaxation, and others. This article investigates a dual bound that results from the Lagrangian relaxation of all constraints of quadratic extremal problem. The main issue when using this approach for solving quadratic extremal problems is the quality of the obtained bounds (the magnitude of the duality gap) and the possibility to improve them. While for quadratic convex optimization problems such bounds are exact, in other cases this issue is rather complicated. In non-convex cases, to improve the dual bounds (to reduce the duality gap) the techniques, based on ambiguity of the problem formulation, can be used. The most common of these techniques is an extension of the original quadratic formulation of the problem by introducing the so-called functionally superfluous constraints (additional constraints that result from available constraints). The ways to construct such constraints can be general in nature or they can use specific features of the concrete problems.

The purpose of the article is to propose methods for improving the Lagrange dual bounds for quadratic extremal problems by using technique of functionally superfluous constraints; to present examples of constructing such constraints.

Results. The general concept of using functionally superfluous constraints for improving the Lagrange dual bounds for quadratic extremal problems is considered. Methods of constructing such constraints are presented. In particular, the method proposed by N.Z. Shor for constructing functionally superfluous constraints for quadratic problems of general form is presented in generalized and schematized forms. Also it is pointed out that other special techniques, which employ the features of specific problems for constructing functionally superfluous constraints, can be used.

Conclusions. In order to improve dual bounds for quadratic extremal problems, one can use various families of functionally superfluous constraints, both of general and specific type. In some cases, their application can improve bounds or even provide an opportunity to obtain exact values of global extrema.

Keywords: quadratic extremal problem, Lagrangian relaxation, dual bound, functionally superfluous constraints.